Cap. 1 - O espaço e o tempo na Relatividade

Resumo:
- várias ideias da Relatividade já estavam presentes na Física clássica de Newton e outros
- invariância da velocidade da luz no vácuo contraria previsão da Física clássica
- análise de Einstein sobre a relação (conexão) entre observações feitas em diferentes referenciais (inerciais) muda nossos conceitos de tempo e espaço

Objetivos (de aprendizado):
- usar o princípio de relatividade
- compreender como a dilatação do tempo e contração do espaço mudam nossas concepções
- usar as transformações de Lorentz para posições e velocidades

Implicações tecnológicas da Relatividade
- funcionamento do GPS e de sistemas de navegação de aviões
- reatores nucleares geram ~ 3% da energia elétrica no Brasil, ~ 20% nos EUA
- tomografia por emissão de pósitrons (PET) monitora atividade cerebral

Cap. 1 - O espaço e o tempo na Relatividade

Resumo:

- várias ideias da Relatividade já estavam presentes na Física clássica de Newton e outros
- invariância da velocidade da luz no vácuo contraria previsão da Física clássica
- análise de Einstein sobre a relação (conexão) entre observações feitas em diferentes referenciais (inerciais) muda nossos conceitos de tempo e espaço

Objetivos (de aprendizado):

- usar o princípio de relatividade
- compreender como a dilatação do tempo e contração do espaço mudam nossas concepções
- usar as transformações de Lorentz para posições e velocidades

Implicações tecnológicas da Relatividade

- funcionamento do GPS e de sistemas de navegação de aviões
- reatores nucleares geram ~ 3% da energia elétrica no Brasil, ~ 20% nos EUA
- tomografia por emissão de pósitrons (PET) monitora atividade cerebral

1.1 Relatividade

Maioria das medidas físicas pressupõe a escolha de um sistema de referência, é relativa a um referencial.

Exemplos: tempo, posição, energia cinética

⇒ relatividade das medidas

A teoria da Relatividade é o estudo das consequências da relatividade das medidas, que são dramáticas, como mostrou Einstein em 1905, mas usualmente indistinguíveis daquelas previstas pela Física clássica quando aplicadas a objetos que se movem com velocidades "pequenas".

⇒ o que é velocidade pequena

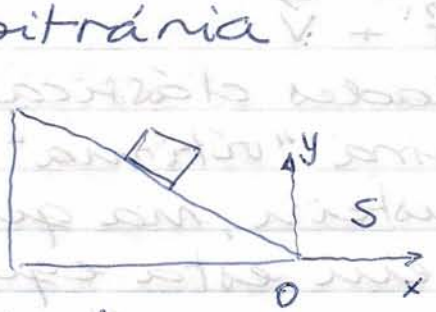
A teoria da Relatividade se desdobra, na realidade, em duas:

- a restrita, ou especial, que focaliza referenciais inerciais e exclui a gravidade;
- a geral, que inclui referenciais acelerados e a gravidade: é a teoria relativística da gravitação, que envolve o estudo de buracos negros, do universo em larga escala, e do efeito gravitacional terrestre sobre medidas de tempo de alta

precisão (1 parte em 10^{12})

1.2 A relatividade de origem e orientação

Em Física clássica, sua escolha é arbitrária.

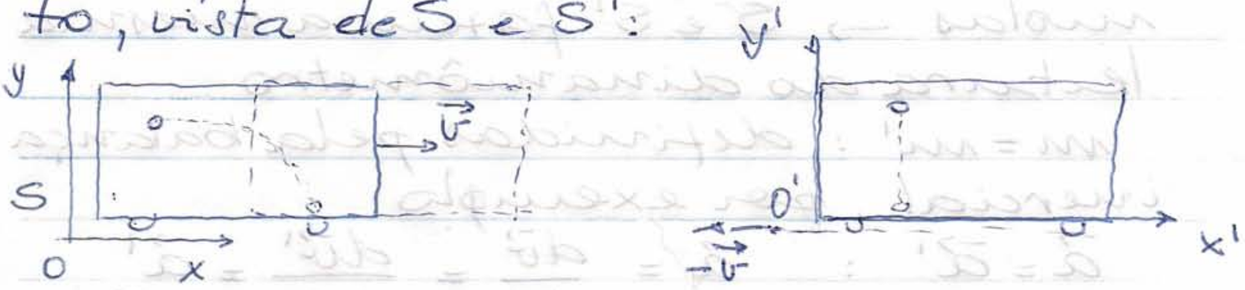


Na linguagem da Relatividade, as leis de Newton são <u>invariantes</u> (não mudam) pela troca de S por S', ou vice-versa.

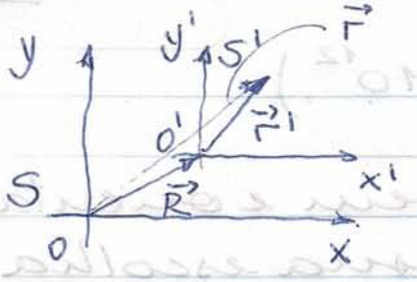
De fato, todas as leis básicas da Física clássica e da relatividade de Einstein gozam desta invariância (trivial).

1.3 Referenciais em movimento

Um problema: bola abandonada do repouso num trem em movimento, vista de S e S':



Descrição em S' tem pressuposto sutil: observador no trem pode usar as leis de Newton: elas são <u>invariantes</u> na classe dos referenciais <u>inerciais</u>.



$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R}$$

Pressuposto (tempo absoluto): $\Delta t = \Delta t'$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$$

$\Rightarrow$ soma de velocidades clássica (ou galileana): primeira "vítima" da relatividade de Einstein, na qual $\vec{v}$ e $\vec{v}\,'$ não satisfazem esta equação – que é, no entanto, uma ótima aproximação quando as velocidades são pequenas.

Consequências para as leis de Newton:

. 1ª : se $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v}$ é constante
$\Rightarrow \vec{v}\,'$ também é
e vice-versa

. 2ª : se $\vec{F} = m\vec{a} \overset{?}{\Rightarrow} \vec{F}' = m'\vec{a}\,'$

$\vec{F} = \vec{F}'$: forças definidas pela deformação que provocam em molas $\rightarrow$ S e S' fazem a mesma leitura do dinamômetro

$m = m'$: definidas pela balança inercial, por exemplo

$\vec{a} = \vec{a}\,'$: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d\vec{v}\,'}{dt'} = \vec{a}\,'$ $\left(\dfrac{d\vec{V}}{dt} = 0\right)$

. 3ª : como as forças medidas em S e S' são iguais (ver acima), é válida em ambos.

Logo, se as leis de Newton são válidas em S ⇒ saõ válidas em S'.
⇒ leis de Newton saõ invariantes na classe dos referenciais inerciais.

Isto não é verdade se incluirmos referenciais acelerados ou em rotaçaõ (Exemplo: bola parada em S')

1.4. Relatividade clássica (galileana) e a velocidade da luz

A invariância acima não é verdadeira para o eletromagnetismo (EM), que prevêm que ondas EM se propaguem no vácuo, em qualquer direçaõ, com velocidade

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3{,}00 \times 10^8 \, m/s \quad (= 299.792.458 \, m/s)$$

Seja S no qual leis EM sejam válidas, e S' trem que se move com velocidade V em S e que recebe pulsos EM de proa e de popa (vide exemplo 1, pg 1.5a)

$$\Downarrow$$

$|v'_{proa}| = c + V$, $|\vec{v}'_{popa}| = c - V$, e a velocidade depende da direçaõ de propagaçaõ:

$$c - V \leq c' \leq c + V$$

Nota histórica: S era o referencial do éter

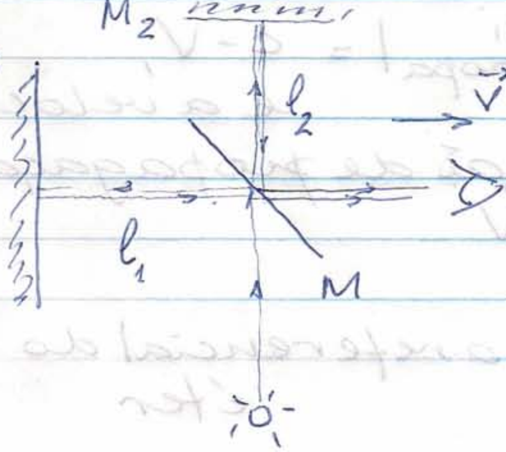
Sumário da relatividade clássica (galileana) - lógica e consistente

Por motivos filosóficos ou estéticos, a diferença entre a mecânica clássica e o EM é surpreendente e desconfortável, mas argumentos puramente teóricos não podem assegurar sua veracidade. A questão só pode ser decidida pela observação da natureza (experiência). Como fazer isto?

A velocidade orbital da Terra (S') ($\sim 3\times10^4$ m/s) deve ser da ordem de sua velocidade em relação a S (éter); logo, ondas EM se propagam com velocidades entre $3\times10^8 - 3\times10^4$ m/s e $3\times10^8 + 3\times10^4$ m/s em S' - variam de 1 parte em 10^4, pequeno demais para medida direta (em 1900).

Solução: interferômetro e a

1.5 Experiência de Michelson-Morley (1880-1887) (ver Ivan)



Diferença de percurso ótico

⇓

figura de interferência

Exemplos:

1. Velocidade do som
Avião a 200 m/s relativo ao chão (S);
Ondas sonoras com velocidade 340 m/s em S
. de proa
. de popa
Velocidades em S' (avião)?

modelo: S e S' são inerciais
visualização:
solução: velocidade de uma onda mecânica é relativa ao meio que a suporta; isto é, o ar está parado em S
. proa: $v = -340$ m/s
. popa: $v = 340$ m/s
velocidade de S' em (relação a) S:

$$V = 200 \text{ m/s}$$

$$\Downarrow$$

$$v' = v - V = -340 - 200 = -540 \text{ m/s (proa)}$$
$$= 340 - 200 = 140 \text{ m/s (popa)}$$

conferência: pense em carros numa estrada

2. Ondas se aproximam da praia a 10 m/s. Barco se afasta a 6 m/s. Velocidade das ondas no referencial do barco?

3. Aplicação da relatividade (invariância) galileana: análise de colisão elástica (por exemplo, com massas iguais) unidimensional

- Percurso paralelo a $\vec{V}$ (1):

$$t_1 = \frac{\ell}{c+V} + \frac{\ell}{c-V} = \frac{2\ell c}{c^2-V^2} = \frac{2\ell}{c}\frac{1}{1-\beta^2}$$

$\beta = \frac{V}{c}$ (medida adimensional),

onde esperamos que $\beta \simeq 10^{-4}$

$\Downarrow$

$$t_1 \simeq \frac{2\ell}{c}(1+\beta^2) \qquad \underline{(1-x)^n \simeq 1-nx}$$

- Percurso perpendicular a $\vec{V}$ (2):

$\Rightarrow v' = \sqrt{c^2-V^2}$, e

$$t_2 = \frac{2\ell}{\sqrt{c^2-V^2}} = \frac{2\ell}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2 \simeq \frac{2\ell}{c}\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)$$

- Diferença de (tempo de) percurso:

$\Delta t = t_1 - t_2 \simeq \frac{\ell}{c}\beta^2$ (se os braços do interferômetro forem perfeitamente iguais!)

O que interessa é a razão $\frac{\Delta t}{T} = N$ ($T = \frac{\lambda}{c}$ é o período da luz):

- se N = inteiro $\Rightarrow$ interferência construtiva
- = semi-inteiro $\Rightarrow$ destrutiva

Para eliminar o efeito dos braços desiguais: gire o interferômetro de 90°! E compare os padrões de interferência. O efeito dos braços continua o mesmo, mas inverte a diferença de fase devida ao movimento da Terra. Logo, a diferença de fase entre as 2 orientações será

$$\Delta N = \frac{2\ell\beta^2}{\lambda} \left(= (\ell_1 + \ell_2)\frac{\beta^2}{\lambda} \right)$$

Dados reais:

$\ell \simeq 11\,m$, $\lambda = 590\,nm$

$\Rightarrow \Delta N \simeq 0{,}4$ (previsão)

O aparelho podia detectar $\Delta N \simeq 10^{-2}$.

Resultado real: nulo!

1.6 Os postulados da Relatividade

. Princípio da Relatividade (ou definição de referencial inercial)

Num referencial inercial, todas as leis da Física são verdadeiras em sua forma mais simples

Quais são "todas" as leis? De fato, Einstein usou seus postulados para induzir quais ~~ser~~ deveriam ser as leis da Física (corretas)!

Uma das leis clássicas que sobrevive intacta é a 1ª lei de Newton.

. Primeiro postulado
Se S é inercial e S' se move com velocidade constante em S ⇒ S' é inercial

ou:

As leis da Física são invariantes na classe dos referenciais inerciais.

ou:

Não existe movimento absoluto

ou

Não existe referencial privilegiado na classe de referenciais inerciais

. Segundo postulado
A velocidade da luz no vácuo é a mesma ($c = 299.792\,458\ m/s$) em todos os referenciais inerciais e em todas as direções: a velocidade da luz é universal.

1.7 Medida de (intervalo de) tempo

A entidade fundamental da relatividade é o evento: uma atividade física que acontece num ponto definido do espaço e num instante definido no tempo. Podemos quantificar onde e quando um evento ocorre por um conjunto de 4 números, as coordenadas espaciais (x, y, z) e o instante t, que são as coordenadas espaço-temporais do evento. Estas coordenadas (x, y, z, t) medidas no referencial S vão diferir das (x', y', z', t') medidas num referencial (inercial) distinto S'. Vamos ver que os postulados da relatividade implicam numa relação entre estas coordenadas diferente da transformação galileana, mas que se reduz à esta para $\beta \ll 1$.

Num referencial inercial S podemos instalar um conjunto de relógios sincronizados: na vizinhança espacial de cada evento haverá sempre um destes (estático em S).

Como sincronizá-los: depois de instalados, a distâncias (em S) bem definidas d da origem, cada um é programado para indicar o instante $t = \frac{d}{c}$ quando receber o pulso sincronizador, emitido da origem em $t = 0$.

Discussão: ao receber o pulso, sabemos em que instante (em S) ele foi emitido!

1.8 A relatividade do tempo: dilatação do (intervalo de) tempo

- A relatividade da simultaneidade
Depois de estabelecer a maneira de medir o instante em que um evento ocorre, podemos investigar a natureza do tempo usando uma experiência similar a uma sugestão de Einstein. Seu propósito é enfatizar o fato de que eventos simultâneos em um referencial não o são em outro.

detetor : se receber flash à direita primeiro ⇒ acende luz verde
ou
acende luz vermelha otherwise

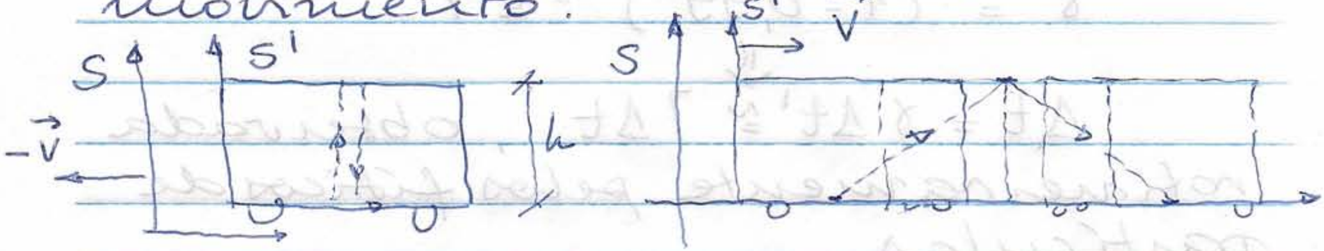
S: medidas de posição das marcas
+ recepção simultânea dos feixes
⇒ foram emitidos simultaneamente (em S)
Como S' se move para a direita ⇒ feixe da direita chegou primeiro ao detetor
⇒ acende luz verde

S': detetor no ponto médio entre os explosivos; se emissão simultânea (em S') ⇒ feixes chegam simultaneamente ao detetor ⇒ acende luz vermelha!

Logo: explosões não são simultâneas em S' (a da direita acontece antes!)

Exercício: árvore e poste a 3.000 m de distância são atingidos por raios. Marcos, parado no ponto médio entre os 2 recebe os feixes ao mesmo tempo. Nanci está num foguete com $V = 0{,}5c$ e vai da árvore para o poste. O raio cai na árvore quando ela está a seu lado. Evento 1 é "raio cai na árvore" e evento 2 é "raio cai no poste". Para Nanci, o evento 1 acontece antes, depois, ou ao mesmo tempo que o evento 2?

Vamos comparar medidas feitas em S e S' através de um "gedanken experiment" famoso: pulso na direção vertical num vagão em movimento.



em S':

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}$$

em S: $(c\Delta t/_2)^2 = (v\Delta t/_2)^2 + h^2$

$$\Downarrow$$

$$\Delta t = \frac{2h}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \Delta t',$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \; \beta \leq 1, \; \gamma \geq 1$$

A conclusão se aplica a quaisquer 2 eventos que ocorram na mesma posição (espacial) em S'. Ou ainda: o mesmo relógio marcou os instantes inicial e final em S', 2 relógios (sincronizados, mas distintos!) marcaram os instantes inicial e final em S.

Se $v \ll c \Rightarrow \beta \simeq 0$ e $\gamma \simeq 1 \Rightarrow \Delta t \simeq \Delta t'$ (Galileu)

Aceleradores de partículas produzem elétrons e outras partículas com velocidades $\sim 0{,}99c$ ou mais.
Neste caso,

$$\gamma = (1-0{,}99^2)^{-1/2} \simeq 7$$

$$\Delta t = \gamma \, \Delta t' \cong 7 \Delta t$$, observada rotineiramente pelos físicos de partículas

Se $v = c \Rightarrow \beta \to \infty$
$v > c \Rightarrow 1-\beta^2 < 0$, o que sugere (corretamente) que $v < c$ sempre, um dos mais profundos resultados da relatividade de Einstein

Como $\gamma \geq 1 \Rightarrow \Delta t \geq \Delta t'$, o que soa como uma surpreendente assimetria entre 2 referenciais igualmente inerciais, e sugere um papel especial para S'. Este papel o é de fato: S' é o único referencial inercial no os eventos que limitam o intervalo medido ocorrem no mesmo lugar no espaço. Para enfatizar esta real assimetria, usamos notação e nomenclatura:

$\Delta t' = \Delta t_0$, intervalo de tempo próprio entre os 2 eventos, e

$\Delta t = \gamma \, \Delta t_0$: dilatação do tempo

Exemplos:
1. Observadores A e B estacionários em S, A na origem, B em $x = 900m$; pulso é recebido por B em $t = 3{,}00 \mu s$, por A em $t = 4{,}00 \mu s$; coordenadas do evento emissão do pulso?

modelo: A e B estão no mesmo referencial e tem relógios sincronizados
visualização:
solução: a diferença entre os instantes de recepção é $1{,}00 \mu s$ ($c = 300 m/\mu s$)
$\Rightarrow x - 0 = 900 - x + 300$
$x = 600 m$.
A recebe o pulso ~~em~~ no instante $4{,}00 \mu s$
$\Rightarrow$ pulso foi emitido $2{,}00 \mu s$ antes
coordenadas da emissão:
$(600m, 0, 0, 2{,}00 \mu s)$
comentário: apesar de receberem o pulso em instantes diferentes, A e B concordam ~~em~~ sobre o instante de sua emissão

2. Eventos ~~são~~ simultâneos num referencial não são necessariamente vistos ao mesmo tempo
Observador na origem de S recebe em $t = 3{,}0 \mu s$ pulso emitido em $x = 600m$, e em $t = 5{,}0 \mu s$ pulso emitido em $x = 1200m$. Foram emitidos simulta-

neamente? Qual o foi primeiro?

modelo: pulsos têm velocidade
$c = 300\ m/\mu s$
solução: pulso 1: $(600m, 0, 0, 1{,}0\mu s)$
pulso 2: $(1200m, 0, 0, 1{,}0\mu s)$
=> foram emitidos simultaneamente.

3. Uma árvore e um ~~mastro~~ poste estão a uma distância de 3000m, e são atingidos por (2) raios. Marcos, que está bem no meio dos 2, vê os 2 raios simultâneamente. Nanci está perto da árvore. Chame de 1 o evento "raio cai na árvore" e de 2 o evento "raio cai no poste". Para Nanci, o evento 1 acontece antes, depois, ou ao mesmo tempo que o evento 2?

4. Piloto de jato a 300 m/s dispara um alarme a intervalos de 1 hora (em S'). Qual é o intervalo em S - superfície da Terra suposta inercial?

$$\beta = \frac{v}{c} = 10^{-6}$$

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

$$\Delta t = \Delta t' \cdot \gamma \simeq \left(1 + \frac{1}{2} \times 10^{-12}\right) \times 1 =$$

$$= 1 + \underbrace{5 \times 10^{-13}\, h}_{\simeq 1{,}8\, ns}$$

5. Saturno está a $1{,}43 \times 10^{12}$ m do Sol. Foguete com $V = 0{,}9c$ vai em linha reta do Sol a Saturno. Quanto tempo leva a viagem
a) para um observador na Terra?
b) para o astronauta?

modelo: S é o sistema solar, S' o foguete
Problemas de relatividade devem ser postos em termos de eventos. Chame de evento 1 "Sol e foguete estão juntos" e de evento 2 "Saturno e foguete " " ".

visualização:
em S: tempo entre eventos é Δt
em S': é o tempo próprio, $\Delta t' = \Delta t_0$

solução:

em S: $$\Delta t = \frac{\Delta x}{V} = \frac{1{,}43 \times 10^{12}}{0{,}9 \times 3 \times 10^{8}} = 5300\,s$$

em S': $$\Delta t' = \Delta t_0 = \frac{1}{\gamma} \Delta t = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta t =$$

$$= \sqrt{1 - 0{,}9^2} \cdot 5300 = 2310\,s$$

comentário:
esta diferença não tem nada a ver com o instante em que um observador na Terra <u>vê</u> o foguete chegar a Saturno. Δt é o intervalo decorrido desde o instante em que o foguete passou pelo Sol, medido por um relógio ali colocado, até o instante em que chegou a

Saturno, medido por um relógio em Saturno mas sincronizado com o primeiro.

O intervalo entre os instantes em que o foguete é visto perto do Sol e perto de Saturno, é outro, e tem que ser determinado levando em conta o tempo de trajeto da luz.

Δt e $\Delta t' (= \Delta t_0)$ são diferentes porque o tempo é diferente em 2 referenciais em movimento relativo.

6. Foguete (S') com velocidade V passa por observador (S). Este e o astronauta medem o tempo que o foguete leva, do nariz à cauda, na frente do observador. Assinale a frase verdadeira:

(a) $\Delta t = \Delta t'$

(b) $\Delta t' < \Delta t$

(c) $\Delta t < \Delta t'$

Evidência experimental

. 1971: relógio atômico em jato ao redor do planeta atrasa ~200 ns, como previsto pela relatividade

. muons (partícula instável - meia vida de partícula estacionária é 1,5 μs) criados no topo da atmosfera (60 km): $\Delta t = \frac{\Delta x}{v} \simeq \frac{60\,km}{c} \simeq 200\,\mu s$ (133 meias-vidas) — mas 1 em cada 10 chega! (133 meias-vidas ⇒ 1 em cada 10^{40} chegaria ao nível do mar

Discrepância é devida à dilatação do tempo: os eventos "muon é criado" e "muon chega ao solo" acontecem em posições diferentes no referencial da Terra, mas na mesma posição no referencial do muon. O intervalo dilatado 200 μs corresponde a um tempo próprio $\Delta t_0 = 5\,\mu s$ no referencial do muon, ou 3,3 meias-vidas

. dúzias de aceleradores de partículas foram desenhados e construídos com base na teoria da Relatividade (pions, ½ vida $1{,}8 \times 10^{-8}$ s, Fermilab: $v = 0{,}9999995c$)

Paradoxo dos gêmeos

Helena e Jorge são irmãos gêmeos de 25 anos. Helena vai e volta a uma estrela a 9,5 anos luz de distância, com $V = 0{,}95c$. Para Jorge (Helena), Helena (Jorge) vai levar 20 anos: ele (ela) envelhecerá 20 anos, enquanto {ela} (ele) envelhecerá apenas $\Delta t_0 = \dfrac{\Delta t}{\gamma} = 6{,}25$ anos. Quem está certo?? O que é que impede a simetria?

$\Rightarrow$ O princípio da relatividade se aplica apenas a referenciais inerciais.

1.10 Contração de comprimentos (Lorentz)

A distância (espacial) entre 2 eventos (também) depende do referencial em que é medida. Para medi-la precisamos determinar a posição de suas extremidades num mesmo instante, e a relatividade da simultaneidade vai provocar a diferença nas medidas feitas em referenciais em movimento relativo.

Considere o foguete do exemplo 5, pg 111b. No referencial S (Terra-Sol), a distância L é percorrida no tempo Δt a uma velocidade v. No referencial S', os eventos "partida do Sol" e "chegada a Saturno" ocorrem na mesma posição (espacial): o intervalo de tempo $\Delta t'$ é o tempo próprio Δt_0. Neste referencial, Saturno percorre distância L' em $\Delta t'$ com a mesma velocidade v (em módulo)

$$\Rightarrow \frac{L}{\Delta t} = \frac{L'}{\Delta t_0} \Rightarrow L' = L\,\frac{\Delta t_0}{\Delta t} \Rightarrow L' = \frac{L}{\gamma}$$

Exemplos

1. Pions (méson π carregado) são formados em colisões entre núcleos atômicos; têm meia-vida de $1{,}8\times10^{-8}$ s. No Fermilab são criados com $v = 0{,}9999995c$, e têm que percorrer distância de 1 km até a região onde serão usados em experiências.

No lab, o tempo de vôo é

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} \simeq \frac{10^3}{3\times10^8} = 3{,}3\times10^{-6}\ s,\ \text{ou}$$

$$183\ t_{1/2}$$

Logo, se N_0 pions são produzidos,

$$N = \frac{N_0}{2^{183}} \simeq 8{,}2\times10^{-56}\,N_0$$ chegam à região da experiência! (Nenhum)

Mas não é isto o que ocorre: $t_{1/2}$ é a meia-vida no referencial do píon $\Rightarrow$ deve ser comparado com $\Delta t'$ (tempo em S').

Neste caso, $\gamma = 10^3$, e $t_{1/2}(S) = \gamma\, t_{1/2}(S')$

$$\Downarrow$$

$$t_{1/2}(S) = 1{,}8\times10^{-5}\ s,\ \text{e}\ \Delta t \simeq 0{,}2\ t_{1/2}(S)$$

$$\Downarrow$$

$$N = \frac{N_0}{2^{0,2}} \simeq 0{,}9\,N_0$$

2. A partícula Λ decai ($\Lambda \to p + \pi$) com meia-vida $t_{1/2} = 1{,}7\times10^{-10}$ s. Se N_0 são criados numa colisão nuclear com $V = 0{,}6c$, que distância percorrerão até que metade tenha decaído?

Solução:

$t_{1/2}(S) = \gamma\, t_{1/2}(S')$, e $\gamma = 1{,}25$

$\Downarrow$

$d = v\,\gamma\, t_{1/2}(S') = 0{,}6 \times 3 \times 10^{8} \times 1{,}25 \times 1{,}7 \times 10^{-10}$
$= 3{,}8\,cm$

Note que uma distância da ordem de cm é muito + fácil de medir que um (intervalo de) tempo de 10^{-10} s

$\Downarrow$

medida do alcance de partícula instável é muitas vezes a forma + simples de encontrar sua meia-vida.

Mas L é a distância medida no referencial S em que suas extremidades estão em repouso $\Rightarrow$ é a distância (comprimento) próprio L_0

$$\Rightarrow L' = \frac{L_0}{\gamma} \leq L_0 \quad (\gamma \geq 1)$$

Com: Só existe um referencial em que um comprimento é próprio.

A contração de Lorentz é um efeito real bem estabelecido experimentalmente. Um destes é o trânsito de píons instáveis num acelerador de partículas. Em S, a meia-vida do píon aumenta por um fator γ. Em S', os píons são estacionários e sua meia-vida não é dilatada, mas a distância que têm que percorrer - ou melhor, que o tubo do acelerador tem que percorrer - é encurtada pelo mesmo fator γ.

Comprimentos perpendiculares ao movimento relativo

Suponha Q (Q') estacionário em S(S'), Q e Q' com mesma altura, fazem risco quando se defrontam. A situação é completamente simétrica, com 1 único observador em cada referencial - ao contrário das experiências de pensamento anteriores que necessitavam de 2 observadores.

nenhum dos referenciais. Logo, nenhum dos 2 riscos atinge o observador do outro referencial, e os comprimentos não se alteram.

O intervalo espaço-temporal

Considere 2 sistemas de coordenadas em 2D, com a mesma origem mas orientações diferentes. Então,

$x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, \Delta x_1 \neq \Delta x_2$, mas

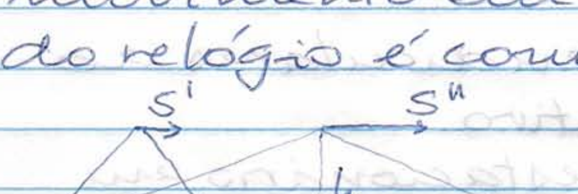
$$d^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta y_1)^2 = (\Delta x_2)^2 + (\Delta y_2)^2$$

$$\Downarrow$$

A quantidade $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ é um invariante geométrico.

Será que existe um invariante (relativístico) nas coordenadas espaço-temporais? Sim!

Considere outra vez o relógio de luz, visto nos referenciais S' e S'', em movimento em relação a S. A altura do relógio é comum aos 2.



$$h^2 = \left(\tfrac{1}{2} c\Delta t'\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\Delta x'\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2} c\Delta t''\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\Delta x''\right)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2(\Delta t'')^2 - (\Delta x'')^2$$

Definimos o intervalo espaço-temporal entre 2 eventos S como:

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

Exemplos

1. Distância do Sol a Saturno no referencial S' do foguete ($V = 0{,}9c$) é
$L' = \frac{L_0}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}\, L_0 = \sqrt{1-0{,}9^2} \times 1{,}43 \times 10^{12}$
$= 0{,}62 \times 10^{12}$ m

2. Duas réguas com 1m são carregadas por 2 observadores em movimento relativo. Cada um vê a do outro contraída. Paradoxal?

3. Usando o intervalo espaço-temporal. Uma bomba explode na origem de S; 2,0 μs depois outra explode a 300m. Astronauta num foguete mede a distância entre as explosões e encontra 200m. Qual o intervalo entre elas em S'?

~~é invariante~~

modelo: as coordenadas espaço-temporais de 2 eventos são medidas em 2 referenciais inerciais distintos em movimento relativo. O intervalo espaço-temporal entre os 2 eventos é invariante

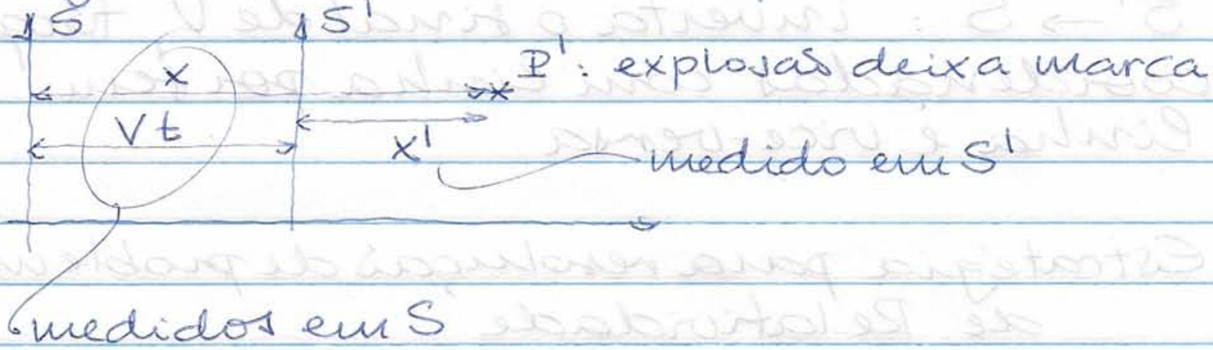
solução

$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (600)^2 - (300)^2 =$
$= 3 \times 10^2 \times 9 \times 10^2 = 27 \times 10^4\, m^2$ (em S)
$= c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$ (em S'
$= c^2(\Delta t')^2 - (200)^2 \rightarrow \Delta t' = 1{,}85\, \mu s$

4. Bete e Carlos em repouso relativo vêm Adão passar correndo segurando um mastro na horizontal e medem seu comprimento quando Adão passa por Bete. Ponha em ordem decrescente o resultado dessas 3 medidas.

1.11 A transformação de Lorentz

Na configuração standard, os referenciais S e S' têm eixos Ox e Ox' paralelos à velocidade relativa $\vec{V}$ e origens coincidentes quando $t=t'=0$



Transformação de Galileu

$$x' = x - Vt \qquad (t'=t)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Distância $O'P$ é

x' em S' (comprimento próprio)

$x - Vt$ em S

Contração de Lorentz

$$\Rightarrow x - Vt = \frac{x'}{\gamma} \Rightarrow x' = \gamma(x - Vt)$$

Se invertermos os papéis de S e S' teremos

$$x = \gamma(x' + Vt')$$

Álgebra: $x = \gamma[\underbrace{\gamma(x-Vt)}_{\parallel} + Vt']$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)$$

Resumo: $x' = \gamma(x - Vt)$
$(S \to S')$ $y' = y$
$z' = z$
$t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)$

$S' \to S$: inverta o sinal de V, troque coordenadas com linha por sem linha e vice-versa.

Estratégia para resolução de problemas de Relatividade

- modelo: estabeleça o problema em termos de eventos, que acontecem em posição e tempo bem determinados
- visualize: use uma representação gráfica - desenho, esquema - para definir os referenciais; nesta representação:
  - mostre o movimento relativo
  - mostre os eventos e identifique objetos que se movem em relação aos referenciais
  - identifique tempos e comprimentos próprios, que são medidos no referencial de repouso do objeto
- resolva: a representação matemática é baseada na transformação de Lorentz, mas nem todos os problemas necessitam que as usemos:
  - problemas sobre intervalos de tempo podem frequentemente ser resolvidos usando-se a dilatação do tempo.

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$

- problemas sobre distâncias podem frequentemente ser resolvidos usando-se a contraçaõ de Lorentz
- problemas dos 2 tipos podem às vezes ser resolvidos usando-se a invariância do intervalo espaço-temporal

. confira: a soluçaõ se traduz numa situaçaõ concreta possível? atende aos postulados da Relatividade? saõ consistentes com a relatividade galileana quando $V \ll c$?

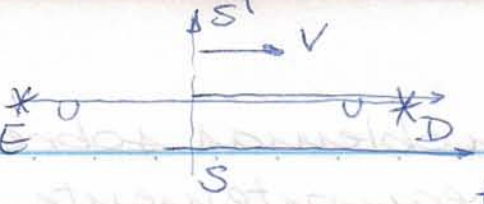
1.12 Aplicações da transformaçaõ de Lorentz

1. S' tem origem O' no centro de vagaõ com explosivos nas extremidades, e se move com $V = 0{,}8c$ com relaçaõ a S. Origem O de S recebe feixes simultâneos dos explosivos $1{,}0\,\mu s$ depois de coincidir com O', e vê as marcas deixadas nos trilhos, a $300\,m$ dos 2 lados.
(a) Qual a distância entre as 2 explosões em S? Em que momento ocorrem relativo ao instante da coincidência OO'?
(b) Mesmas perguntas, em S'?

. modelo: chamemos de D o evento "explosaõ à direita" (referenciaõs na configuraçaõ standard) e de E o "explosaõ à esquerda".

tilibra

visualização:



$t = t' = 0$

solução:

(a) Em S: as marcas indicam que a distância é $300+300 = 600\,m$; $c = 300\,m/\mu s$
$\Rightarrow$ em S, explosões ocorreram $1\mu s$ antes da coincidência OO'. As coordenadas espaço-temporais dos eventos são:

$E \equiv (x_E, t_E) = (-300m, 0)$ e

$D = (300m, 0)$

(b) Já sabemos que E e D não são simultâneos em S' (porque?): D ocorre antes de E em S', mas não sabemos (ainda) se $t'_E > 0$ ou $t'_E < 0$.

Vamos usar a transformação de Lorentz para isto para determinar t' e x' (sabendo t e x).

$$\cdot\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = \frac{1}{0{,}6} = \frac{5}{3}\ (=1{,}667)$$

. Para o evento E:

$$x'_E = \frac{5}{3}\left(-300 - 0{,}8c \times 0\right) = -500m$$

$$t'_E = \frac{5}{3}\left(0 - \frac{0{,}8c \times (-300)}{c^2}\right) = \frac{4}{3} = 1{,}33\,\mu s$$

Para o evento D:

$$x'_D = \frac{5}{3}\,300 = 500\,m$$

$$t'_D = \frac{5}{3}\left(-\frac{0{,}8c\,(300)}{c^2}\right) = -\frac{4}{3} = -1{,}33\,\mu s$$

Portanto, em S'
a distância foi 1000m
D ocorreu 1,33μs antes da coincidência OO', E 1,33μs depois

confirme: resultados confirmam nossa análise qualitativa.

Comentários:
- S se move com $V = 0{,}8c = 240\,m/\mu s$ em relação a S', logo anda $240 \times \frac{4}{3} = 320m$ durante o intervalo entre D e a coincidência, e mais 320m até o evento E
- As (marcas das) explosões definem os limites do vagão. Portanto, em S' este tamanho (próprio!) é 1000m. Em S, ele aparece contraído de γ $\Rightarrow$ seu tamanho é $\frac{1000}{5/3} = 600m$, que é a distância entre as marcas neste referencial.
- O intervalo espaço-temporal invariante é (entre os 2 eventos)

$$s^2 = c^2 \cdot 0^2 - (600)^2 = -600^2 m^2 \quad (\text{em } S)$$
$$= c^2\left(\frac{8}{3}\right)^2 - (1000)^2 = -600^2 m^2 \quad (\text{em } S')$$
$$\Downarrow$$
s^2 é invariante e s é imaginário!

- O comprimento de um objeto é a diferença de posição entre suas extremidades medidas simultaneamente. Imagine objeto de comprimento próprio (em S') L_0, e medidas simultâneas (em t) de suas extremidades x_D e x_E em S. Pela transformação de Lorentz,

$$x'_D = \gamma\,(x_D - Vt) \quad \text{e}$$

$$x'_E = \gamma\,(x_E - Vt)$$

$$\Rightarrow \quad x'_D - x'_E = L_0 = \gamma\,(x_D - x_E) = \gamma L, \text{ e}$$

$$L = L_0/\gamma$$

A contração de comprimentos não nos diz como veríamos o objeto. Esta análise tem que envolver o trânsito da luz e é bem mais complexa.

2. Vamos usar a transformação de Lorentz para obter a dilatação do tempo no relógio de luz.

Sejam os eventos E "emissão de luz" e R "recepção da luz". Em S', temos $E = (x'_E, t'_E)$ e $R = (x'_R, t'_R)$; mas $x'_R = x'_E$.

Em S, temos

$$t_E = \gamma\left(t'_E + \frac{Vx'_E}{c^2}\right) \text{ e}$$

$$t_R = \gamma\left(t'_R + \frac{Vx'_R}{c^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$t_R - t_E = \Delta t = \gamma\,\Delta t_0$$

tilibra

1.13 Soma de velócidades

Vamos usar a transformação de Lorentz para deduzir a fórmula correta para a soma de velocidades. Imagine um objeto cuja velocidade vamos discutir e considere 2 pontos vizinhos sobre sua trajetória, de coordenadas $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), t_1$ e $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2), t_2$ em S. Sua velocidade neste referencial tem por componentes os limites das razões $\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}$ e $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ quando $\Delta t \to 0$. Sua velocidade em S' tem componentes similares, usando coordenadas medidas neste referencial (S'). A relação entre as coordenadas em S' e S é dada pela transformação de Lorentz,

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t), \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z,$$
$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{V\Delta x}{c^2}\right),$$

e

$$v'_x = \lim \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \lim \frac{\gamma(\Delta x - V\Delta t)}{\gamma\left(\Delta t - \frac{V\Delta x}{c^2}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x/\Delta t - V}{1 - \frac{V}{c^2}\Delta x/\Delta t} = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x V/c^2)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - v_x V/c^2)},$$

que constituem a maneira correta de somar velocidades.

Elas se reduzem à fórmula galileana quando $\frac{V}{c} \ll 1$

1.14 O efeito Doppler

Relembre o fenômeno sonoro: frequência recebida ≠ frequência emitida se fonte e receptor tem movimento relativo. O mesmo ocorre com a luz, com 2 importantes diferenças:

(i) o fenômeno deve ser tratado relativisticamente ($v' = c$)

(ii) no caso sonoro existe uma assimetria, produzida pelo referencial de repouso do meio no qual o som se propaga, que deixa de existir para a luz; o efeito Doppler para a luz não distingue movimento da fonte ou do receptor.

Considere S' com velocidade V em relação a S, que emite luz de frequência f_{fonte}, no referencial de repouso da fonte (S'), e observador O, à frente de si, em repouso em S que vai receber esta luz, com frequência ~~$f_{observador}$~~ $f_{receptor}$.

No referencial S, a distância entre 2 cristas consecutivas será $c\Delta t - V\Delta t = \lambda$
$\Rightarrow$ a distância entre 2 cristas consecutivas é diminuída como resultado do movimento da fonte. Logo,

$$f_r = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{(c-v)\Delta t} = \frac{1/\Delta t}{1-\beta}$$

Exemplos

1. Foguete com $V = 0{,}8c$ relativa à Terra emite feixe de partículas com $v' = 0{,}9c$ (em relação ao foguete). Quem é v?
   Invertendo a fórmula de soma (troca variáveis linha por variáveis sem linha, inverte V)

$$\Downarrow$$

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2} = \frac{0{,}9c + 0{,}8c}{1 + 0{,}9 \times 0{,}8} = \frac{1{,}7c}{1{,}72} \simeq 0{,}99c$$

2. No exemplo anterior, as partículas emitidas são fótons. E agora?

$$v = \frac{c + V}{1 + V/c} = c!$$

3. Luz de galáxia distante é desviada para o vermelho por fator 3. A galáxia se aproxima ou se afasta? Com que velocidade?

$$f_r = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, f_f = \frac{1}{3} f_f$$

$$\frac{1-\beta}{1+\beta} = \frac{1}{9} \Rightarrow 10\beta = 8 \Rightarrow \beta = 0{,}8$$

$$V = 0{,}8c$$

4. Átomos de vapor de sódio quente emitem luz de $\lambda_f = 589$ nm (medido no referencial de repouso do átomo). Tomando 300 m/s como velocidade máxima destes átomos, determine a

faixa de comprimentos de onda observados.

$$V = 300\,m/s \Rightarrow \beta = \frac{V}{c} = 10^{-6} \Rightarrow \gamma \simeq 1$$

$$f_r \cong \frac{f_f}{1 \pm \beta}\ ; \quad \text{como } \lambda = \frac{c}{f},$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_r \simeq \lambda_f (1 \pm \beta) = \lambda_f \pm \Delta\lambda,$$

$\Delta\lambda = \lambda_f \beta = 10^{-6} \times 589\,nm \simeq 6 \times 10^{-4}\,m$, que é um desvio facilmente observável por um bom espectrômetro. Isto significa que o que seria uma linha espectral bem definida vira uma faixa de largura $2\Delta\lambda$, fenômeno chamado alargamento Doppler

5. Deduza a fórmula Doppler em S'

Durante o tempo $\Delta t'$ que Q leva entre 2 cristas consecutivas, a 2ª anda $c\Delta t'$

$$\Rightarrow \quad \lambda' = c\Delta t' + V\Delta t' = \frac{c}{f_f}$$

$$\Delta t' = \frac{c\,{}^1/f_f}{(c+v)} = \frac{{}^1/f_f}{1+\beta}$$

Mas $f_r = \frac{1}{\Delta t}$, e agora Δt é o tempo próprio, intervalo entre 2 cristas chegando a Q

$$\Rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t$$

$$f_r = \frac{\gamma}{\Delta t'} = \gamma(1+\beta) f_f = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, f_f.$$

Mas Δt é o tempo entre a emissão de 2 cristas em S, onde os 2 eventos ocorrem em posições distintas. O intervalo $\Delta t'$ correspondente em S' é o tempo próprio:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \Delta t_0$$

$$f_r = \frac{1/\Delta t'}{\gamma(1-\beta)} = \frac{f_f}{(1-\beta)\gamma}$$

(fonte se aproxima do receptor), que podemos reescrever de forma + simétrica:

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}$$

$$f_r = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, f_f \quad \text{(aproximação)}$$

Se a fonte se afasta do receptor, basta trocar V por $-V$, e

$$f_r = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, f_f \quad \text{(afastamento)}$$

Lembre: frequência recebida aumenta com a aproximação e diminui com o afastamento.

Um exemplo importante deste efeito é o desvio para o vermelho da luz recebida de estrelas distintas ("redshift"). Uma estrela emite e absorve luz de frequências determinadas, características dos elementos químicos que a compõem. Ao determinar se estas frequências, tais como observadas na Terra, sofreram desvio para mais ou para menos, em comparação às recebidas de fontes estacionárias), podemos identificar como é o movimento relativo estrela-Terra. O astrônomo americano Edwin Hubble descobriu que a luz de galáxias distantes sofre desvio de frequência para menos, indicando que elas se distanciam de nós. Ele também descobriu que a velocidade de afastamento é aproximadamente proporcional à distância para a Terra, resultado conhecido como lei de Hubble, o que implica que o Universo está se expandindo uniformemente.

O efeito Doppler da luz tem muitas aplicações:
(i) radar Doppler: carro vê frequência maior que a emitida ⇒ luz recebida gera (induz) minúsculas correntes na carroceria, com frequência maior que a do canhão de emissão ⇒ sinal é refletido com esta frequência, que aumenta ainda mais quando recebida pelo radar. O desvio total é bem pequeno, mas facilmente mensurável.
(ii) resfriamento por laser usa o efeito para frear movimento de átomos num gás
(iii) efeito alarga linhas espectrais